Espaces vectoriels

trois semaines

Table des matières

ECUE concerné **2**

Motivation **2**

Attendus **3**

1 Vecteurs et espaces vectoriels **3**
1.1 Résumé . . . 3
1.2 MiMos à travailler . . . 3
1.3 Exercices . . . 3
Exercice 1.1 . . . 3
Exercice 1.2 . . . 4
Exercice 1.3 . . . 5
Exercice 1.4 . . . 5
Exercice 1.5 . . . 5

2 Sous-espaces vectoriels **5**
2.1 Résumé . . . 5
2.2 MiMos à travailler . . . 5
2.3 Exercices . . . 5
Exercice 2.6 . . . 6
Exercice 2.7 . . . 6
Exercice 2.8 . . . 6
Exercice 2.9 . . . 7
Exercice 2.10 . . . 7
Exercice 2.11 . . . 8
Exercice 2.12 . . . 8
★ Exercice 2.13 . . . 8

3 Familles génératrices, familles libres et bases **8**
3.1 Résumé . . . 8
3.2 MiMos à travailler . . . 8
3.3 Exercices . . . 8
Exercice 3.14 . . . 9
Exercice 3.15 . . . 9
Exercice 3.16 . . . 10
Exercice 3.17 . . . 10
Exercice 3.18 . . . 10
Exercice 3.19 . . . 10
Exercice 3.20 . . . 11
Exercice 3.21 . . . 11
Exercice 3.22 . . . 11
★ Exercice 3.23 . . . 11

ECUE concerné

Cette feuille de TD constitue à elle seule l'ECUE EV : espaces vectoriels. Cet ECUE intervient sur les deux bimestres B3 et B4.

Les **prérequis** sont :

— ECUE [MATH-S1-1-OBM] : parties « Logique », « Ensembles » et « Fonctions » du séminaire
— Résoudre un système linéaire à deux équations et deux inconnues.
— Écrire l'équation cartésienne et/ou paramétrique d'un droite ou d'un plan vectoriel de l'espace 3D.

Motivation

L'ingénierie mathématique passe en premier lieu par la modélisation des problématiques auxquelles on fait face. La situation à l'étude sera transposée dans une description mathématique qui permet d'apporter une réponse (éventuellement approchée ou partielle) au problème de départ. On va modéliser par exemple l'évolution d'une population animale par une suite récurrente reliant le nombre d'individus de la génération actuelle à celui de couples dans la population des générations précédentes. On pourra encore modéliser la chute d'un objet par l'équation différentielle qui régit cette situation physique.

Il est important de noter qu'une situation n'est pas nécessairement modélisée par un et un seul modèle mais peut être vue sous plusieurs angles ou à l'aide de modèles qui varient en complexité. On pourrait par exemple modéliser l'évolution de notre population animale à l'aide d'une équation différentielle ou encore aux dérivées partielles. La chute d'un objet, si elle devait prendre en compte la vitesse du vent ou le mouvement terrestre, nécessiterait un modèle plus complexe que celui que vous avez pu aborder en mécanique newtonienne.

Le plus simple des modèles qu'on sait manipuler est le modèle ***linéaire***. Il recouvre les modéles dans lesquels les données en jeux sont liées linéairement, au sens où vous avez pu l'entendre dans votre scolarité secondaire. Malgré sa simplicité il permet de résoudre un nombre important de problèmes standards liés à l'informatique. On peut par exemple citer les problèmes :

— d'encodage et de transmission fiables de données, par le biais des codes linéaires et codes correcteurs,
— d'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles assistée par ordinateur,
— de régressions polynômiales en IA, où il s'agit de chercher la fonction polynômiale dont le graphe approche au mieux un nuage de points,
— d'entraînement des réseaux de neurones profonds, toujours en IA,
— de reconnaissance faciale par une analyse par composantes principales.

Ces différents problèmes et leurs modélisations font partie de l'outillage qu'on souhaite voir un ingénieur informaticien porter.

Dans votre pratique jusqu'à présent vous avez eu affaire à deux situations linéaires : dans le cadre des suites récurrentes et celle des équations différentielles.

Une suite récurrente du premier ordre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par une écriture de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour f une fonction réelle, avec une condition initiale. Vous avez pu constater par le passé qu'expliciter l'expression de u_n comme fonction de n pour une fonction f quelconque n'est pas facile, parfois même particulièrement difficile. Un cas cependant est simple à traiter, celui où f est une fonction linéaire, c'est-à-dire est donnée par une expression de la forme $f(x) = \alpha x$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans ce cas u_{n+1} s'exprime linéairement en fonction de u_n et on se retrouve face à une suite géométrique, dont on connaît une expression explicite. Cette simplicité se retrouve également si l'on s'intéresse aux suites récurrentes d'ordre supérieur, comme la suite de Fibonacci, où l'expression de u_{n+2} est linéaire en u_{n+1} et u_n. On peut encore citer le cas des équations différentielles linéaires homogènes, où une fonction f et ses dérivées sont liées linéairement. En général résoudre une équation différentielle quelconque de manière exacte n'est pas à portée de main.

Dans le but de pouvoir utiliser le modèle linéaire dans des contextes professionalisant il va nous falloir en étudier le langage, les objets qui sous-tendent ce modèle et les interactions entre ceux-ci. Les

concepts qu'on pourra exprimer à l'aide de ce langage seront au cœur de l'ensemble des utilisations faites de ce modèle. La démarche est ici plus abstraite que ce dont vous avez eu l'habitude, cette abstraction vient de la grande variabilité des contextes dans lesquels ce modèle est présent. Dans une terminologie orientée objet, beaucoup de situations héritent de la classe abstraite définie par la notion d'espace vectoriel.

Attendus

À la fin de ce chapitre, vous devez être capables de :

— Identifier un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel.
— Identifier le caractère d'une famille de vecteurs (libre ?, génératrice ?, base ?).
— Trouver la dimension d'un sev de dimension finie.
— Utiliser un argument de dimension dans des raisonnements portant sur des espaces vectoriels.

Plus en détails, vous devez être capables de :

— Montrer si un ensemble est un espace vectoriel ou pas.
— Analyser la somme de deux sous-espaces vectoriels (somme directe ?, supplémentaires ?).
— Analyser une famille de vecteurs d'un des espaces vectoriels de référence (libre ?, génératrice ?, base ?).
— Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée en dimensions finie.
— Trouver une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.
— Démontrer une relation d'inclusion ou d'égalité entre deux sous-espaces vectoriels.
— Utiliser un argument de dimension pour démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

1 Vecteurs et espaces vectoriels

1.1 Résumé

Cette partie a pour but de vous faire manipuler les objets mathématiques que sont les vecteurs. Les vecteurs tels que vous les avez toujours connus, définis dans l'espace par une direction, un sens et une longueur. Mais également et surtout les vecteurs au sens élargi, tels que vous les découvrez actuellement. Autrement dit, comme éléments d'un ensemble muni de deux lois et aux propriétés particulières qu'on appelle ***espace vectoriel***.

Ainsi, on va notamment explorer les espaces vectoriels suivants dans lesquels vous serez amenés à travailler très régulièrement :

— $\mathbb{R}^n$ ou ensemble des n-uplets de réels, en commençant par le plan avec $n = 2$,
— ensemble des suites numériques,
— ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive

1.2 MiMos à travailler

Mimo : Introduction aux espaces vectoriels
Mimo : Propriétés d'un espace vectoriel

1.3 Exercices

Exercice 1.1

On se place dans un premier temps dans le cas de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On cherche dans cet exercice à *dessiner*. Vous pouvez directement dessiner dans le quadrillage ci-dessous (2 carreaux =1 unité).

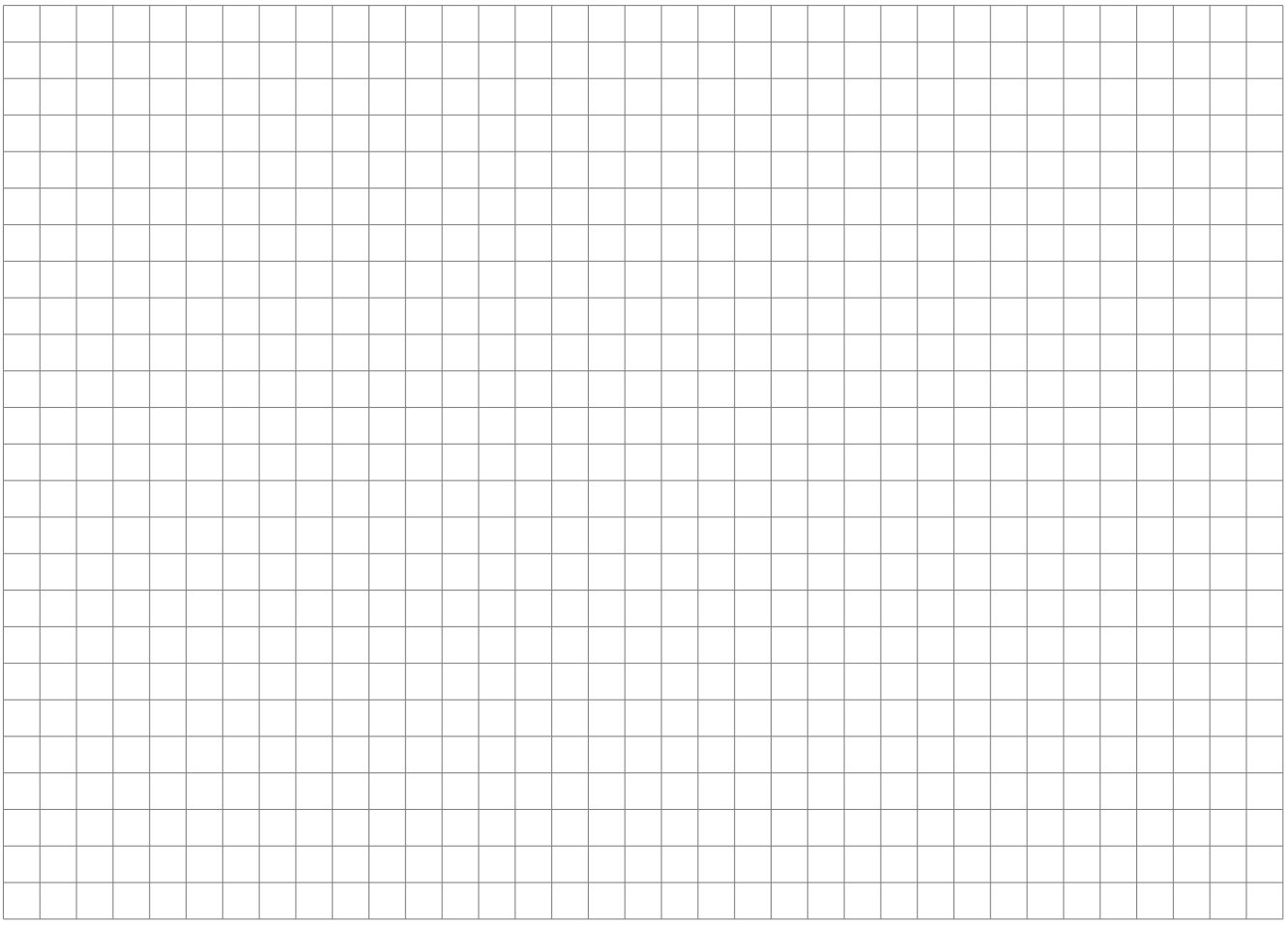
1. Dessiner les axes du plan $\mathbb{R}^2$ et représenter le vecteur $u = (3, 1)$.

2. Représenter les vecteurs $2u$, $-u$, $-\frac{1}{2}u$ et $0u$. Lire graphiquement leurs coordonnées.

   À votre avis, que représente l'ensemble $D = \{\alpha u, \alpha \in \mathbb{R}\}$?

3. Ajouter sur le dessin le vecteur $v = (-2, 1)$. Construire alors les vecteurs $u + v$, $v - u$, $2u + 3v$. Lire graphiquement leurs coordonnées.

   À votre avis, que représente l'ensemble $E = \{\alpha u + \beta v, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$?



4. Définir l'addition interne $+$ et la multiplication externe $\cdot$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Vérifier la cohérence avec vos résultats graphiques.
5. À votre avis, que représentent les ensembles D et E si u et v sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 1.2

(Travail personnel) On s'intéresse à l'ensemble E des tableaux de réels répartis en 2 lignes et 2 colonnes sous la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont réels}$$

On définit sur E deux opérations notées $+$ et $\cdot$ et respectivement définies par

— pour tout A, B sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$,

$$A + B = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

— et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

1. Quel serait l'élément neutre pour chacune des lois + et · ainsi définies sur E ?
2. Vérifiez que les propriétés qui font de E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sont bien satisfaites.

Exercice 1.3

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On note E l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Que signifie $\boldsymbol{0}_E$?
2. On dit que l'addition des fonctions est une opération interne sur l'ensemble E. Que signifie ***interne*** dans cette appellation ? Définissez cette opération comme une application en précisant bien les ensembles de départ et d'arrivée.
3. Soit α un réel quelconque, qu'est-ce que la fonction αf ? On dit que la multiplication des fonctions par un réel est une opération externe. Selon vous pourquoi ? Définissez cette opération comme une application en précisant bien les ensembles de départ et d'arrivée.
4. E se note aussi $\mathbb{R}^I$. À votre avis, muni des deux opérations définies précédemment, $\mathbb{R}^I$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 1.4

On s'intéresse à l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'opération externe donnée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\alpha \cdot (u_n) = (\alpha^n u_n) = (u_0, \alpha u_1, \alpha^2 u_2, \alpha^3 u_3, \ldots).$$

1. Quel serait l'élément neutre d'une telle opération ?
2. Si l'on munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de l'opération interne d'addition, obtient-on un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1.5

Faire la liste de tous les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de référence, en précisant pour chacun d'entre eux, les deux opérations + et · ainsi que le vecteur nul.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Résumé

Vous avez étudié les huit propriétés qui font d'un ensemble E muni de deux opérations respectivement interne (addition) et externe (multiplication par un réel) un espace vectoriel. En pratique, nous travaillerons en général dans des espaces vectoriels identifiés, par exemple dans $\mathbb{R}^n$, dans l'espace vectoriel des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}[X]$ ou encore dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Pour l'enrichir, nous aurons bien souvent recours aux critères qui font d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel un sous-espace vectoriel. Objet qui est, lui-même, un espace vectoriel.

Nous verrons par ailleurs comment ***construire*** de nouveaux sous-espaces vectoriels (éventuellement sans redondance).

2.2 MiMos à travailler

Mimo : Définition d'un sous-espace vectoriel
Mimo : Combinaisons linéaires, caractérisation et intersection d'espaces vectoriels
Mimo : Somme, sous-espace vectoriel engendré

2.3 Exercices

Exercice 2.6

On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. On se focalise pour commencer sur le cas de $\mathbb{R}^2$. Vous êtes à nouveau invités à ***dessiner***.
   (a) Dessiner les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous et indiquer ceux qui représentent un sous-espace vectoriel. Pour ceux qui n'en sont pas, en indiquer la raison.
   On appelle O le point de coordonnées (0,0).
   A : Le singleton $\{\mathrm{O}\}$
   B : Disque de rayon 1 et de centre O
   C : Demi-plan $x \geq 0$
   D : Axe des abscisses
   E : Droite $x + y = 0$
   F : Droite $x + y = 1$
   (b) Est-il possible d'avoir deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel qui soient disjoints ?
   (c) A votre avis, quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
2. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.7

1. Que représente l'ensemble $E = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$?
2. En utilisant une écriture similaire ***en compréhension*** décrire l'ensemble F des polynômes de degré deux exactement.
3. Quel est le lien entre E et F ? Dans quel espace vectoriel de référence sont-ils inclus ?
4. Qu'est-ce que le polynôme nul ? Appartient-il à E ? à F ?
5. E et F sont-ils stables pour le produit externe . ? pour l'opération interne + ?

Exercice 2.8

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-ev ?

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
3. ***(Travail personnel)*** $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy = 0\}$
4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 = z^2\}$
5. $F = \{P \in \mathbb{R}[X], XP'' - 3P = 0\}$
6. $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P'(3) = 0\}$
7. ***(Travail personnel)*** $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ convergente}\}$
8. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1\}$
9. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ divergente}\}$
10. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$
11. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n^2\}$
12. ***(Travail personnel)*** $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n + \gamma 4^n\}$
13. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ croissante}\}$
14. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0\}$
15. ***(Travail personnel)*** $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ paire}\}$
16. $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \lim_{+\infty} f = +\infty\}$
17. ***(Travail personnel)*** $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ continue}\}$

18. $F = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$

Exercice 2.9

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev E. Étudier l'assertion

$$F \cup G \text{ sev de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Exercice 2.10

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs : $u = (2,4)$, $v = (3,1)$ et $w = (-1,-2)$.

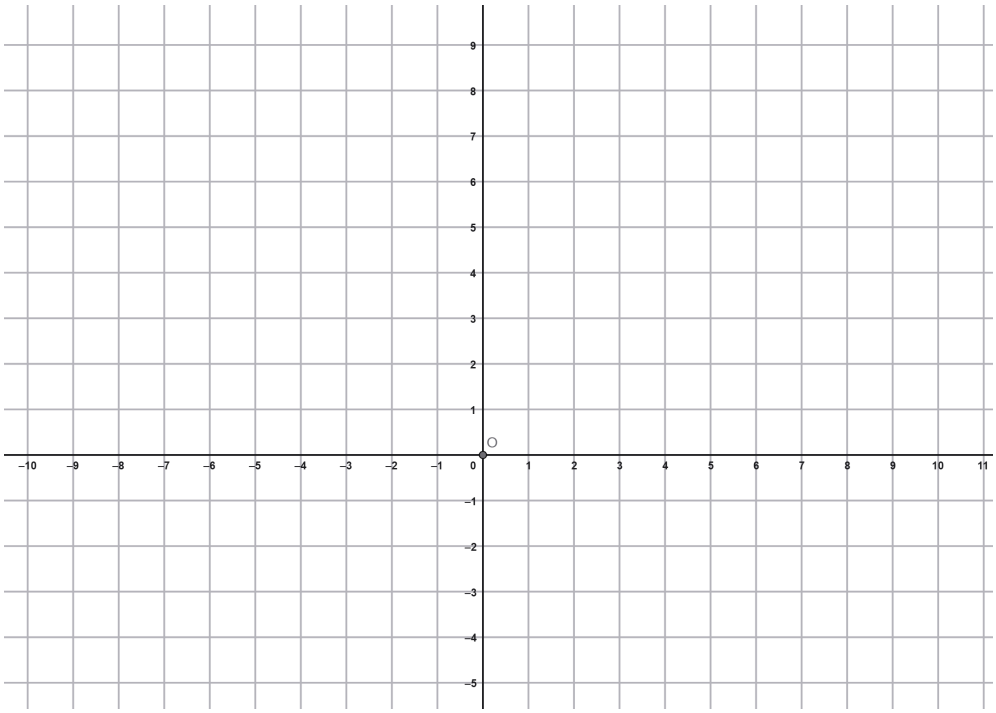
1. Soit l'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists\,\alpha \in \mathbb{R},\ (x,y) = \alpha u\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère de plus les ensembles suivants :

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists\,\alpha \in \mathbb{R},\ (x,y) = \alpha v\right\} \text{ et } H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists\,\alpha \in \mathbb{R},\ (x,y) = \alpha w\right\}$$

   (a) À votre avis, G et H sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

   (b) Que représentent géométriquement ces 3 ensembles ? Les dessiner.



   (c) Soit $X = (-2,6)$. Graphiquement, voir si $X \in F + G$ et si $X \in F + H$.

   (d) Que peut-on dire de $F + G$ et de $F + H$?

N.B. : en résumé et suite à une ambiguïté dans les MiMos, voilà les deux définitions de « somme directe » et « supplémentaires » à connaitre :

Définition : soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- On dit que F et G sont en **somme directe** si $F \cap G = \{0_E\}$.
- On dit que F et G sont **supplémentaires dans** E si d'une part, $E = F + G$ et d'autre part, F et G sont en somme directe. Dans ce cas là, on note $E = F \oplus G$.

  Autrement dit, $E = F \oplus G \iff (E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\})$
- On montre (cf « PDF démonstrations à connaitre ») que

$$E = F \oplus G \iff \forall\, u \in E,\ \exists!(v,w) \in F \times G,\ u = v + w$$

Exercice 2.11

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et F, G et H trois sev de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus H = E$. Peut-on en conclure que $G = H$? Justifier votre réponse en vous inspirant de l'exercice précédent.

Exercice 2.12

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les trois sous-espaces vectoriels :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$

et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = z = 0\}$

1. A-t-on $F \cap G = \{0_E\}$ et $F \cap H = \{0_E\}$?
2. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et $F \oplus H = \mathbb{R}^3$? Justifier.

★ **Exercice 2.13**

On se place dans le cas de l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. Rappeler la définition de la parité d'une fonction.
2. On note respectivement $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les espaces des fonctions dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ paires et impaires. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Que pouvez-vous dire de leur somme ?
3. On note A une partie de $\mathbb{R}$ et $E_A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le sous-ensemble des fonctions qui s'annulent sur A. Trouver un supplémentaire de E_A dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. Comment adapter les notions précédentes aux cas de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{R}_3[X]$?

3 Familles génératrices, familles libres et bases

3.1 Résumé

De nombreux problèmes en algèbre linéaire s'expriment en définissant un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ambiant. C'est par exemple le cas des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, sans condition initiale. La question de savoir comment définir un sous-espace vectoriel avec un minimum d'information est donc cruciale : c'est la notion de ***base***.
Cette notion est d'autant plus précieuse pour un informaticien qu'elle lui permettra (dans le cas fini) de remplacer l'étude d'un sous-espace vectoriel quelconque par celle d'une famille ***finie***, que l'on peut donc potentiellement stocker en machine.

On apprend dans cette section à identifier des familles minimales sans redondance qui engendrent le sous-espace vectoriel avec lequel on travaille : les bases. On trie sur ce chemin les familles pour lesquelles on n'a pas de redondance sans pour autant générer tout l'espace (les famille libres) ainsi que celles qui permettent de construire tout l'espace (les familles génératrices). Ces notions permettent d'appréhender les aspects techniques de la détermination du "degré de liberté" d'une famille de vecteurs.

3.2 MiMos à travailler

Mimo : Famille libre
Mimo : Famille génératrice
Mimo : Base
Mimo : Dimension d'un espace vectoriel
Mimo : Dimension d'un sev

3.3 Exercices

Exercice 3.14

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire si elle est libre ou liée :

1. $\mathcal{F}_1 = (u = (1,0), v = (0,2), w = (-3,4))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (0,1,2)$ et $v_3 = (1,0,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathcal{F}_3 = (w_1, w_2)$ avec $w_1 = (2,-1,3)$ et $w_2 = (-8,4,12)$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $\mathcal{F}_4 = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (5,2,-11), u_2 = (1,1,2), u_3 = (-1,0,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. ***(Travail personnel)*** $\mathcal{F}_5 = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (-1,1,-1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
6. $\mathcal{F}_6 = (P, Q, R)$ dans $\mathbb{R}[X]$ où : $P(X) = 1 - X + X^2, Q(X) = 3 + X - 2X^2, R(X) = -1 - 3X + 4X^2$
7. ***(Travail personnel)*** $\mathcal{F}_7 = (P, Q, R)$ dans $\mathbb{R}[X]$ où : $P(X) = 1, Q(X) = X^2 + X + 1, R(X) = X^2 - X + 1$
8. ($\star$) $\mathcal{F}_8 = ((u_n), (v_n), (w_n))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où : $(u_n) = (2^n), (v_n) = (3^n)$ et $(w_n) = (4^n)$.
9. ($\star$) $\mathcal{F}_9 = (f, g, h)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = xe^x$ et $h(x) = e^{-x}$.

Exercice 3.15

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs non nuls.

   Écrire mathématiquement l'ensemble C des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.

   À votre avis, C est-il un sous-espace vectoriel de E ? Comment « note-t-on » C dans la théorie des ev ?

2. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1,1,0)$, $v = (-1,2,1)$ et $w = (-2,-2,0)$ et les ensembles :

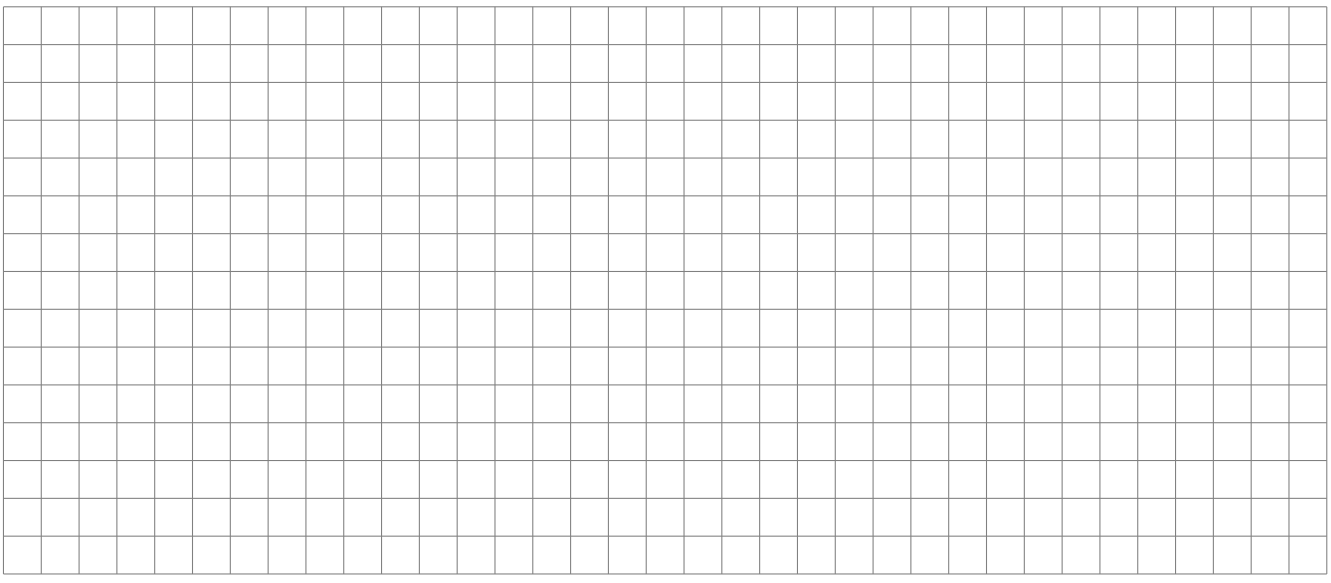
$$F = \{\alpha u,\ \alpha \in \mathbb{R}\},\ G = \left\{\alpha u + \beta v,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\} \text{ et } H = \left\{\alpha u + \beta w,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

   (a) F, G et H sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

   (b) Écrire F, G et H sous forme de Vect. Dire géométriquement ce qu'ils représentent.

   (c) Comparer (au sens de l'inclusion) F et G d'une part et F et H d'autre part.

3. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner $\text{Vect}((1,1))$, $\text{Vect}((-1,1))$, $\text{Vect}((1,2),(3,4))$, $\text{Vect}((1,1),(2,2))$ et $\text{Vect}((1,1),(-1,1),(3,4))$.



4. Dans $\mathbb{R}^3$, géométriquement que représentent : $\text{Vect}((1,1,1))$? $\text{Vect}((1,2,0),(0,3,4))$? $\text{Vect}((1,1,0),(2,2,0))$?
5. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on note $F = \text{Vect}(1, X + X^2)$.
   A-t-on $3 \in F$? $4 + 3X + 4X^2 \in F$? $4 + 3X + 3X^2 \in F$? Réécrire F en compréhension.
6. ($\star$) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $f : x \longmapsto 1$ et $g : x \longmapsto x$. Comment se nomme $F = \text{Vect}((f,g))$?

Exercice 3.16

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1,-1,2), u_2 = (-1,4,1), u_3 = (0,3,3))$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est liée. En extraire une sous-famille libre maximale qu'on notera $\mathcal{F}'$.
2. Montrer que $\text{Vect}\mathcal{F} = \text{Vect}\mathcal{F}'$.
3. Que vaut $\dim(\text{Vect}\mathcal{F}')$?

Exercice 3.17

Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants, en déduire, **proprement**, la dimension du sous-espace vectoriel.

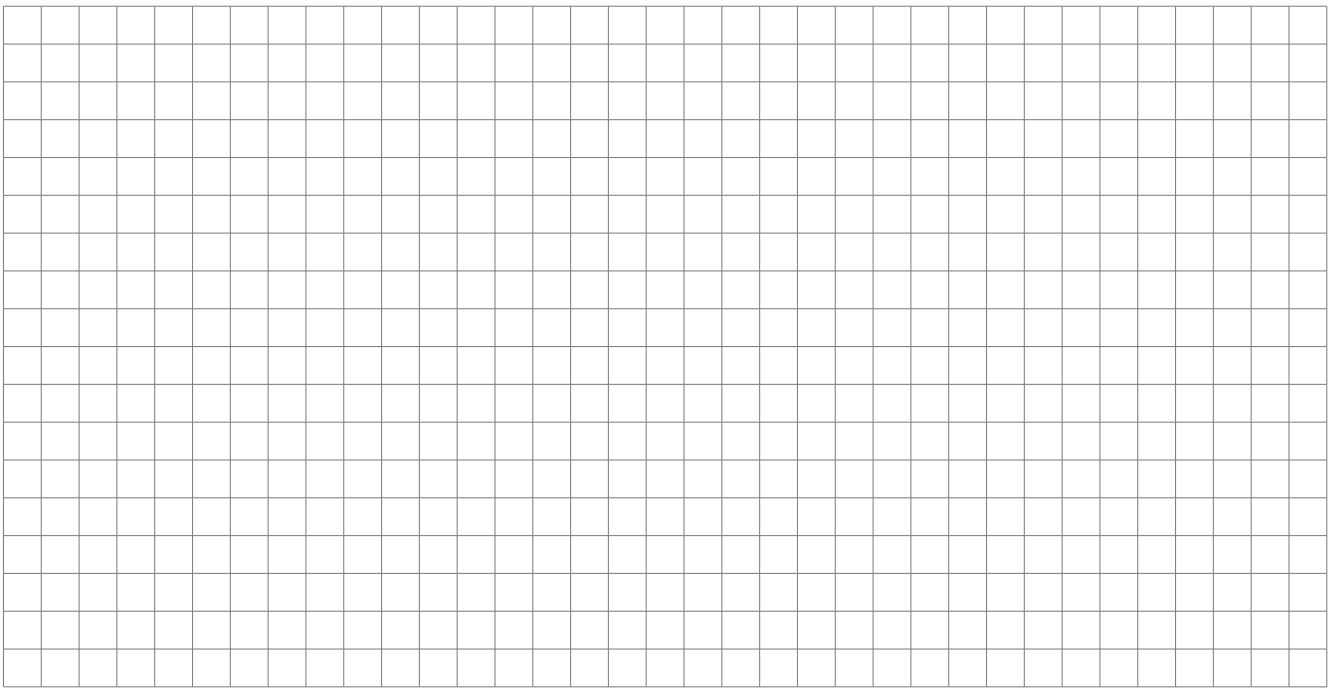
1. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x - 2y = 0\}$
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$
3. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y = 0\}$
4. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y + z = 0\}$
5. $I = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x - z = 0 \text{ et } 3x + 2y + 3z = 0\}$
6. ***(Travail personnel)***
   $J = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + y + t = 0,\ x + y + z = 0 = 0\}$
7. $K = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\}$
8. $L = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$
9. ***(Travail personnel)*** $M = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ X^2 \mid P\}$

Exercice 3.18

1. Rappeler ce qu'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la dimension des ces espaces vectoriels ?
2. Dans $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire du cardinal d'une famille génératrice ? d'une famille libre ? d'une famille liée ? Ces résultats se généralisent-ils à un espace vectoriel de dimension n ?

Exercice 3.19

1. Justifier que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1 = (2,1), \varepsilon_2 = (-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u = (5,1)$. Trouver graphiquement les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. **Vous ferez apparaitre vos traits de construction.**



3. Vérifiez ensuite votre résultat par le calcul.

Exercice 3.20

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (-1, 1, 1), u_3 = (1, -1, 1))$ est-elle une base de E ? Si oui, trouver les coordonnées du vecteur $u = (1, 2, 3)$ dans cette base.
2. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrer que $\mathcal{F} = (P_1 = 1, P_2 = X + 1, P_3 = (X + 1)^2)$ est une base. Quelle sont les coordonnées de $P = X + 2$ dans cette base ?

Exercice 3.21

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 4. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

Dans les phrases suivantes, entourer **toutes** les réponses plausibles parmi les mots « libre », « génératrice » et « liée ».

a. Si $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3$ alors $\mathcal{F}$ peut être : libre génératrice liée
b. Si $\text{Card}(\mathcal{F}) = 5$ alors $\mathcal{F}$ peut être : libre génératrice liée
c. Si $\text{Card}(\mathcal{F}) = 6$ alors $\mathcal{F}$ est forcément : libre génératrice liée
d. Si $\text{Card}(\mathcal{F}) = 4$ alors $\mathcal{F}$ peut être : libre génératrice liée

Exercice 3.22

Dans les exemples suivants, E est un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
F et G sont-ils supplémentaires ?

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - z = y = 0\}$

★ **Exercice 3.23**

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = x + z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ deux sev de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$, mais que F et G ne sont pas supplémentaires.
2. Trouver F' tel que $F' \subset F$ et $F' \oplus G = \mathbb{R}^3$.